Pokažimo da su $A = \{x \in X; f(x) > a\}$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in X; f_k(x) > a\}$ jednaki skupovi. Jasno, $B \subseteq A$. Ako bi za svako k važilo $f_k(x) \leq a$, sledilo bi $f(x) = \sup_{k \in \mathbf{N}} f_k(x) \leq a$. Sledi, $X \setminus B \subseteq X \setminus A$ odnosno $A \subseteq B$, te je $A = B$. Kako je B merljiv skup, merljiv je i A.

2) Važi

$$\inf_{k \in \mathbf{N}} f_k(x) = -\sup_{k \in \mathbf{N}} (-f_k(x)),$$

pa je i $x \mapsto -\sup_{k \in \mathbf{N}} (-f_k(x)) = \tilde{f}(x)$ merljiva funkcija.

3) Pokažimo merljivost funkcije $\tilde{\tilde{f}}$. Važi

$$\tilde{\tilde{f}}(x) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{k \geq n} f_k(x), \ x \in X.$$

Stavimo $g_n(x) = \sup_{k \geq n} f_k(x)$, $x \in X$. Na osnovu 1) g_n su merljive funkcije, a na osnovu 2) $\inf_{n \in \mathbf{N}} g_n$ je merljiva funkcija, te je $\tilde{\tilde{f}}$ merljiva funkcija.

4) Tvrđenje se dokazuje kao u 3) jer

$$\tilde{\tilde{\tilde{f}}}(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x).$$

■

Iz prethodne teoreme sledi čitav niz važnih posledica.

Propozicija 1.7. Ako su $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ merljive funkcije i ako je

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x), \ x \in X,$$

tada je f merljiva.

Dokaz: Ako limes postoji, tada iz

$$\limsup_{k \to \infty} f_k(x) = \liminf_{k \to \infty} f_k(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x),$$

i Teoreme 1.6 pod 3) i 4) sledi da je granična funkcija merljiva. ■

Primetimo da je merljiva funkcija koncept koji je vrlo sličan neprekidnim funkcijama tj. da radi sa merljivim skupovima isto što i neprekidna funkcija radi sa otvorenim skupovima, naime vraća ih unazad tako da inverzne slike ponovo čine merljiv, respektivno otvoren skup (ova osobina da je inverzna slika "dobrog" skupa "dobar" skup se u literaturi često naziva i kao *pull-back* tj. povlačenje unazad). Međutim, za razliku od neprekidnih funkcija, čija klasa nije zatvorena u odnosu na puštanje granične vrednosti po tačkama, granična vrednost merljivih funkcija je uvek merljiva funkcija.